ベルヌーイ数

$B_p(n)=1^p+2^p+3^p+\cdots\cdots+n^p$ とおくと，$p=0,\ 1,\ 2,\ 3$ の場合は公式として知っている。また，$p=4$ の場合について，演習 7 および演習 16 で求めている。同様にして，$B_5(n)$，$B_6(n)$ なども求めることができる。

それらの結果を展開して係数だけを取り出すと右の表のようになる。このとき，n の係数 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{30}$，$\frac{1}{42}$，…… をベルヌーイ数という。実は，このベルヌーイ数さえわかれば，$B_p(n)$を求めることができる。具体的に言えば，$(p+1)B_p(n)$に，n を $\frac{1}{2}n^2$ に，n^2 を $\frac{1}{3}n^3$ に，n^3 を $\frac{1}{4}n^4$ に置き換えるというような操作を行い，その結果に，(ベルヌーイ数)$\times n$ を加えると $B_{p+1}(n)$が得られるというものである。

	n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7
$B_0(n)$	1						
$B_1(n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$B_2(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$				
$B_3(n)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			
$B_4(n)$	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$		
$B_5(n)$	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
$B_6(n)$	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$

例えば，$4B_3(n)=n^2+2n^3+n^4$ に，$\frac{1}{3}n^3+2\cdot\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{5}n^5$ という操作を行って，$-\frac{1}{30}n$ を加えると，$B_4(n)$ になるということである。なぜだろうか，不思議でたまらない。私はまだその理由が理解できていない。